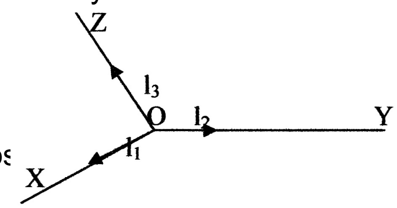
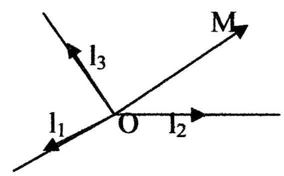
I Mühazirə

Fəzada afin və düzbucaqlı koordinat sistemləri. Parçanın verilən nisbətdə bölünməsi.

1. Tutaq ki, fəzanın ixtiyari O nöqtəsi və ixtiyari l_1, 1_2,1_3 bazisi verilmişdir. O nöqtəsindən və l_1, 1_2,1_3 bazisindən ibarət olan dördlüyə fəzada ümumi dekart koordinat sistemi və ya afin koordinat sistemi deyilir və $Ol_1l_2l_3$ və ya (O,l_1,l_2,l_3) simvolu ilə işarə olunur (şəkil 1).
O nöqtəsi koordinat başlanğıcı, l_1,l_2 və l_3- koordinat vektorları adlanır. Koordinat başlanğıcından keçən, koordinat vektorlarına paralel olan və üzərində müsbət istiqamət təyin olunmuş düz xəttlərə koordinat oxları deyilir. l_1,l_2 və l_3 vektorlarına paralel olan oxlara uyğun olaraq abs ordinat, aplikat oxları deyilir və Ox, Oy, Oz kimi işarə olunur.



Ox və Oy, Ox və Oz, Oy və Ox, Oy və Oz oxları ilə təyin olunan müstəvilərə
şəkil 1.
koordinat müstəviləri deyilir və Oxy, Oxz, Oyz kimi işarə olunur. $Ol_1l_2l_3$ koordinat sistemi bəzən Oxyz kimi də işarə olunur. Fəzanın ixtiyari M nöqtəsini götürək. OM radius-vektorunun l_1, l_2, l_3 bazisindəki x, y, z
koordinatları M nöqtəsinin $Ol_1l_2l_3$ koordinat sistemindəki koordinatları adlanır və M(x,y,z) kimi işarə olunur. X ədədi absis, Y ədədi ordinat, Z ədədi aplikat adlanır (şəkil 2).
Beləliklə, $OM=xe_1+ye_2+ze_3$.



şəkil 2.

Ümumi dekart koordinat sistemində verilmiş $M_1(x_1,y_1,z_1)$ və $M_2(x_2,y_2z_2)$ nöqtələri üçün M_1M_2 vektorunun koordinatları belə hesablanır; $M_1M_2=OM_2-OM_1=$ $=x_2e_1+y_2e_2+z_2e_3-(x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3)=(x_2-x_1)e_1+(y_2-y_1)e_2+(z_2-z_1)e_3$. Deməli, M_1M_2 vektorunun $M_1M_2(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ koordinatları vardır.

Digər tərəfdən, M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölək ($\lambda \neq -1$). M nöqtəsinin koordinatlarını hesablamaq

üçün $OM=\dfrac{OM_1+\lambda OM_2}{1+\lambda}$ bərabərliyindən istifadə olunur. Bu bərabərliyə əsasən müəyyən edirik ki,

M nöqtəsinin x, y, z koordinatları $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ düsturları ilə hesablanır.

Xüsusi halda, M_1M_2 parçasının orta noqtəsinin (λ=1) $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ koordinatları vardır.

l_1,1_2,1_3 bazisi ortonormal bazis olduqda $Ol_1l_2l_3$ düzbucaqlı dekart və ya sadəcə düzbucaqlı koordinat sistemi adlanır. Düzbucaqlı koordinat sistemi adətən Ojik kimi işarə olunur, burada $i^2=j^2=k^2=l$, ij=ik=jk=0.

Oijk düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş $M_1(x_1,y_1,z_1)$ və $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nöqtələri

arasındakı məsafə $M_1M_2=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ düsturu ilə hesablanır.

II Mühazirə

Fəzanın oriyentasiyası. Fəzada afin və düzbucaqlı koordinat sistemlərinin çevrilməsi.

2. Koordinatları ilə verilmiş üc vektorun komplanarlıq əlamətini ifadə edən aşağıdakı teorem doğrudur:

<u>Teorem:</u> İxtiyari l_1, 1_2, l_3 bazisində koordinatları ilə verilmiş $a_1(a_1,a_2,a_3)$, $b_1(b_1,b_2,b_3)$, $c_1(c_1,c_2,c_3)$

$$\begin{vmatrix} a_1,b_1,c_1 \\ a_2,b_2,c_2 \\ a_3,b_3,c_3 \end{vmatrix}$$

vektorlarının komplanar olması üçün zəruri və kafi şərt = 0 bərabərliyin ödənilməsidir. (2)

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və $\vec{c}$ komplanardırlar. Onda bu vektorlar xətti asılıdırlar, yəni eyni vaxtda sıfıra bərabər

olmayan elə α, β, γ ədədləri vardır ki, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ (3)

Bu bərabərliyi koordinatlarala yazaq: $\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1=0$, $\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2=0$, $\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3=0$ (4)

Beləliklə, (2) bərabərliyinin sol tərəfindəki Δ determinantının sütunları xətti asılıdır. Bu isə Δ=0, yəni (2) bərabərliyinin ödənilməsi deməkdir.

Tərsinə, tutaq ki, (2) bərabərliyi ödənilir. Onda Δ determinantının sütunları xətti asıhdır, yəni (4)

bircins tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həlləri vardır. (4) bərabərlikləri uyğun olaraq, l_1, 1_2, l_3 vektorlarına vurub toplasaq, (3) bərabərliyini alarıq. Deməli, $\vec{a}$, $\vec{b}$ və c vektorları xətti asılıdırlar, ona görə də komplanardırlar. Teorem isbat olundu.

Müəyyən nizamla götürülmüş komplanar olmayan ixtiyari üç vektor üç-ölçülü V vektor fəzasının bazisi əmələ gətirdiyindən V fəzasında sonsuz sayda bazislər vardır. Bu bazislərdən ikisini göstərək:

A=($\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$) və B ($\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$). B bazisinin vektorlarını A bazisinin vektorları üzrə ayıraq:

$$\vec{b}_1=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2+c_{31}\vec{a}_3,\quad \vec{b}_2=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2+c_{32}\vec{a}_3,\quad \vec{b}_3=c_{13}\vec{a}_1+c_{23}\vec{a}_2+c_{33}\vec{a}_3$$

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ və $\vec{b}_3$ vektorlarının koordinatlarından düzələn üç tərtibli $\begin{pmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \end{pmatrix}$ (5)

matrisinə baxaq. (5) matrisi A bazisindən B bazisinə keçid matrisi deyilir. Keçid matrisinin determinantını

A|B kimi işarə edək. Beləliklə, A | B=($\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$) | ($\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$) = $\begin{vmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \\ c_{31}c_{32}c_{33} \end{vmatrix}$

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ vektorları xətti asılı olmadığından isbat etdiyimiz teoremə görə A | B $a \neq 0$

Fəzanın ixtiyari A, B və C bazisləri üçün aşağıdakı bərabərliklər ödənilir:

1. A|A = 1;
2. (A|B)(B|C) = A |C;
3. (A|B)(B|A) = 1

Fəzanın bütün bazisləri çoxluğunu β ilə işarə edək. A | B a 0 olduqda deyirki, A, B βbazisləri Δ münasibətindədirlər (və ya eyni oriyentasiyaya malikdirlər). 1-3 xassələrindən bilavasitə alınır ki, Δ münasi-bəti β çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Göstərək ki, β |Δ faktor- çoxluğu yalnız iki elementdən ibarətdir. Bundan

0 1 0

ötrü A=($\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$) və B=($\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$) bazisləri götürək. A|B=1 0 0 = -1 olduğundan, K_A və K_B ekvivalentlik

0 0 1

sinifləri üst-üstə düşmürlər. Digər tərəfdən, ixtiyari $\vec{c}=(\vec{c}_1, \vec{c}_2, c_3)$ bazisi üçün 2 xassəsinə görə, A│C=(A│B)(B│C)=-B│C. Buradan alınır ki, ya A│C> 0, ya da B│C>0. Birinci halda C∈ K_A, ikinci halda isə C∈ K_B olur.

B│Δ fakor-çoxluğunun elementlərindən hər birinə V vektor fəzasının oriyentasiyası deyilir. Bu oriyentasiyalarından birini seçək və onu sağ oriyentasiya (digərini isə sol oriyentasiya) adlandıraq. Müsbət oriyentasiyanın seçildiyi V vektor fəzasına oriyentasiya olmuş vektor deyilir. Müsbət oriyentasiyalı bazislər sağ bazislər, mənfi oriyentasiyalı bazislər isə sol bazislər adlanır.

Tutaq ki, V-E_3 evklit fəzasına uyğun olan vektor fəzadır (yəni onun yönəldici vektor fəzasıdır). V oriyentasiya olunmuş vektor fəza olduqda deyirlər ki, E_3 fəzası oriyentasiya olunmuşdur. Bu halda e_1, e_2, e_3 sağ (sol) bazis olduqda $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ koordinat sistemi sağ (sol) koordinat sistemi adlanır. Adətən fəzanın oriyentasiyası elə seçilir ki, Oxyz sağ koordinat sisteminin Ox, Oy, Oz oxları sağ əlin baş şahədət və orta barmaqları boyunca yönəlmiş olsunlar.

3. Tutaq ki, fəzada iki $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ və $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ afin koordinat sistemləri verilmişdir. Bu koordinat sistemlərini köhnə və yeni koordinat sistemləri adlandıraq. Tutaq ki, M-fəzanın ixtiyari nöqtəsi olub, köhnə və yeni koordinat sistemlərindən də x,y,z və x', y', z' koordinatlarına malikdir. Yeni koordinat sisteminin başlanğıcının və bazis vektorlarının köhnə koordinat sistemindəki $O'(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{e}'(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\vec{e}'(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\vec{e}'(c_{13}, c_{23}, c_{33})$ koordinatlarını bilərək x, y, z koordinatlarını x', y', z' koordinatları ilə ifadə edək.

Verilənlərə görə,

$$\overline{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \qquad \vec{e}'_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3, \tag{6}$$

$$\vec{e}'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3, \qquad \vec{e}' = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3,$$

Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$, ona görə də $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overline{OO'} + x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$. Bu bərabərliyin sağ tərəfində (6) ayrılışlarını nəzər alıb, hər iki tərəfdəki uyğun əmsalları müqayisə etsək, yaza bilərik:

$$x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + x_0, \quad y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \quad z = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + z_0 \tag{7}$$

(7) düsturlarına fəzada afin çevirmə düsturları deyilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorları komplanar olmadığından

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \\ c_{21} c_{22} c_{23} \\ c_{31} c_{32} c_{33} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Matrisinin Δ determinantı sıfırdan fərqlidir. Ona görə də (7) sistemi x', y', z' koordinatlarına nəzərən həll olunandır. (7) düsturlarından xüsusi hal kimi koordinat başlanğıcının köçürülməsi, yeni $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ sistemindən $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ sisteminə keçid zamanı koordinatların çevirmə düsturları alınır. $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$

Digər tərəfdən yeni $O\vec{e}'_1\vec{e}'_2\vec{e}'_3$ koordinat sistemi köhnə $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ koordinat sistemindən yalnız koordinat vektorları ilə fərqləndikdə (koordinat vektorlarının əvəz olunması), (7) düsturları belə yazılır:

$$x = c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z', \qquad y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \qquad z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'.$$

$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ düzbucaqlı koordinat sistemindən $O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ düzbucaqlı koordinat sisteminə keçid zamanı (7) düsturların-dan istifadə oluna bilər. Lakin bu halda (8) keçid matrisinin üzərinə əlavə şərtlər qoyulur. Bu şərtlər aşağıdakılardır: C matrisinin hər bir sətrinin elementlərinin kvadratları cəmi vahidə bərabərdir və iki müxtəlif sətrinin uyğun elementlərinin hasilləri cəmi sıfıra bərabərdir.

$$\begin{pmatrix} 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Belə xassələrə malik olan C kvadrat matrisinə ortoqonal matris deyilir. Məsələn: ,

ortoqonal matrislərdir. Qeyd edək ki, ortoqonal C matrisinin Δ determinantı $\Delta^2 = 1$ şərtini ödəyir, yəni $\Delta = \pm 1$. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ və $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ bazisləri eyni oriyentasiyalı olduqda Δ = 1, əks oriyentasiyalı olduqda isə Δ = -1 olur.

III Mühazirə

Vektorial hasil, xassələri. Vektorial hasil vektorunun koordinatları. Vektorial hasilin tətbiqləri.

1. Tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}$ kollinear olmayan vektorlardır. Fəzanın müəyyən M nöqtəsindən $\overrightarrow{MA} = \vec{a}, \overrightarrow{MB} = \vec{b}$ vektorlarım ayıraq və MACB paraleloqramını elə quraq ki, MA və MB parçaları bu paraleloqramın qonşu tərəfləri olsun. MACB paraleloqramı $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları üzərində qurulan paraleloqram adlanır. Fəzada sonsuz sayda belə paraleloqramlar qurmaq olar. Onların hamısı bir-birinə bərabər olacaqlar. Bu isə onların sahələrinin eyni olmasına gətirib çıxarır.

Tutaq ki, fəza oriyentasiya olunmuşdur.

Verilmiş nizamla götürülən kollinear olmayan $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarının vektorial hasili, uzunluğu bu vektorlar üzərində qurulan paraleloqramın sahəsinə bərabər olan elə $\vec{p}$ vektoruna deyilir, bu vektor $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarına

perpendikulyardır və elə istiqamətlənmişdir ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ bazisi sağ oriyentasiyalı bazisdir. Kollinear vektorlann vektorial hasili sıfır-vektora bərabər hesab olunur.

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarmm vektorial hasili $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ və ya $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ kimi işarə olunur.

<u>Teorem .</u> Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarmın ortononnallaşmış sağ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ koordinatları vardırsa, onda $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ vektorunun $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 b_3 \\ a_1 b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \right\}$ koordinatları vardır.

Vektorların vektorial hasilinin aşağıdakı əsas xassələrini qeyd edə bilərik:

1. $\left[\vec{a}\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\vec{a}\right]$.
2. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha \left[\vec{a}\vec{b}\right]$.
3. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\vec{c}\right]$.

Vektorial hasil əməlinin aşağıdakı tətbiqələri vardır:

1) *Paraleloqramın sahəsinin hesablanmasına vektorial hasilin tətbiqi.*

Tutaq ki, hər hansı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları verilmişdir. Bu vektorlar üzərində qurulan paraleloqramın sahəsi

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

2) *Üçbucağın sahəsinin hesablanmasına vektorial hasilin tətbiqi.*

Tutaq ki, təpələri A, B, C nöqtələri olan üçbucaq verilmişdir. A, B, C üçbucağının sahəsi

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

IV Mühazirə

Qarışıq hasil, xassələri, koordinatlarla ifadəsi. Qarışıq hasilin tetraedrin həcminin hesablanmasına tətbiqi

I. Tutaq ki, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ komplanar olmayan vektorlardır. Fəzanın müəyyən M nöqtəsindən $\overrightarrow{MA}=\vec{a},\overrightarrow{MB}=\vec{b},\overrightarrow{MC}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq və MADBCAıDıBı paralelepipedini elə quraq ki, MA, MB və MC parçaları bu paralelepipedin tilləri olsun. Quralan paralelepipedə $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorları üzərində qurulan paralelepiped deyilir. Tutaq ki, oriyentasiya olunmuşdur. Komplanar olmayan, verilmiş nizamla götürülən $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlannın qarışıq hasili dedikdə bu vektorlar üzərində qurulan paralelepipedin, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sağ bazisi olduqda "+" işarəsi ilə, sol bazis olduqda isə "-" işarəsi ilə götürülən həcmi başa düşülür.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlannın qarışıq hasili $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ və ya $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ kimi işarə olunur.

Teorem. İxtiyari $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bazisi və ortonormallaşmış sağ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisi üçün $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ =(i,j,k)/(a,b ,c) bərabərliyi doğrudur.

Teorem. Əgər $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarmın ixtiyari $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazisində $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ koordinatlan vardırsa, onda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3.$

Nəticə. Əgər $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarının ortonormallaşmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sağ bazisində $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ koordinatlan vardırsa, onda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}.$

Qarışıq hasilin əsas xasssələrini qeyd edək:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$;
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c},\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a},\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c}=\alpha\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$;
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\vec{d}=\vec{a}\vec{c}\vec{d}+\vec{b}\vec{c}\vec{d}$,

burada α- ixtiyari həqiqi ədəddir.

Qarışıq hasilin bəzi tətbiqlərini qeyd edək.

1. *Təpələri A,B,C,D nöqtələrində olan tetraedrin həcmi*

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

düsturu ilə hesablanır.

2. A,B,C,D *nöqtələri yalnız və yalnız* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$ *bərabərliyi ödənildikdə bir müstəvi üzərində yerləşirlər.*

3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorları yalnız və yalnız* $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$*=0 münasibəti ödənildikdə komplanar olurlar.*

V Mühazirə

. Fəzada müstəvinin verilmə üsulları

Tutaq ki, fəzada σ müstəvisi verilmişdir. σ müstəvisinə paralel olan bütün vektorlarin L çoxluğu üçölçülü V vektor fəzasının ikiölçülü alt vektor fəzasıdır. L alt fəzası V-nin yönəldici alt fəzası adlanır. Fərz edək ki, $\vec{a}$ *və* $\vec{b}$ *-L-dən olan xətti asılı olmayan vektorlar cütüdür.* $\vec{a}$ *və* $\vec{b}$ *vektorları L alt fəzasımn bazisini əmələ gətirirlər. σ müstəvisi üzərində müəyyən* M_0 *nöqtəsini götürək.* M_0 *nöqtəsinin σ müstəvisinə aid olması üçün zəruri və kafi şərt* $\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}$ *vektorlarmm komplanarlığı, yəni onlarm qarışıq hasilinin sifira bərabərliyidir:* $\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}\right)=0.$ *(1)*

Bu bərabərlikdən istifadə edərək, müxtəlif üsullarla verilən σ müstəvisinin tənliyini yazaq: 1. Afin koordinat sistemində koordinatlan ilə $M_0(x_0,y_0,z_0)$*nöqtəsi və iki kollinear olmayan* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorları verilmişdir.* M_0 *nöqtəsindən keçən və yönəldici alt fəzası* L(a, b *) olan σ müstəvisinin tənliyini yazaq. (1) bərabərliyinə görə M(x,* y_s *z) nöqtəsi yalnız və yalnız*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1 \\ y-y_0 & a_2 & b_2 \\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənildikdə σ müstəvisinə aid olur.

$M\in\sigma$ *olduqda (1) bərabərliyi ödənüir və deməli, M nöqtəsinin x, y, z koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər.* $M\notin\sigma$ *olduqda isə* $\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}$ *vektorları komplanar olmurlar, ona görə də (1) bərabərliyi ödənilmir və deməli, x, y, z koordinatlan (2) tənliyini ödəmirlər. Beləliklə, (2) tənliyi σ müstəvisinin tənliyidir.*

2. Afm koordinat sistemində koordinatları ilə verilmiş və bir düz xəttə aid olmayan üç Mı(xı,yı,zı), $M_2(x_2,y_2,z_2)$*,* $M_3(x_3,y_3,z_3)$ *nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazaq. Verilmiş nöqtələr bir düz xəttə aid olmadıqlarından* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *və* $\overrightarrow{M_1M_3}$ *vektorları kollinear deyil və baxılan müstəvinin yönəldici alt fəzası L(*$\overrightarrow{M_1M_2}$*,* $\overrightarrow{M_1M_3}$*) alt fəzası olan müstəvi kimi təyin etmək olar. Ona görə də* M_1,M_2,M_3 *nöqtələrindən keçən müstəvinin (2)-yə analoji olan aşağıdakı tənliyi yaza bilərik:*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

3. σ müstəvisinin yönəldici alt fəzasının ixtiyari vektoruna perpendikulyar olan $\vec{n}$ *vektoruna baxaq. Bu halda deyirlər ki,* $\vec{n}$ *vektoru σ müstəvisinə perpendikulyardır. Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində koordinatlan ilə* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *nöqtəsi və sıfırdan fərqli* $\vec{n}$ *(A, B, C) vektoru verilmişdir. Mo nöqtəsindən* $\vec{n}$ *vektoruna perpendikulyar keçən σ müstəvisinin tənliyini yazaq. M(x,*

y, z) nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{n}$ vektorlan ortoqonal olduqda, yəni $\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}\right)=0$ şərti ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M}$ vektorunun $\overrightarrow{M_0M}$ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) koordinatlannı nəzərə alsaq,
sonuncu bərabərliyi

$$A(x-xo)+B(y-yo)+C(z-z_0)=0 \tag{4}$$

şəklində yamaq olar. (4) tənliyi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{n}$ vektoruna perpendikulyar olan müstəvinin tənliyidir.

4. Tutaq ki, fəzada afın koordinat sistemi daxil edilmişdir. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsindən keçən və yönəldici alt fəzası $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ bazisli L fəzası olan σ müstəvisinə baxaq. M(x, y, z) nöqtəsi yalnız və yalnız (1) bərabərliyi ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}$ vektorlarının komplanarhğına əsasən elə u,v ədədləri vardır ki,

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}+v\vec{b}.(5)$$

Beləliklə, M nöqtəsi yalnız və yalnız (5) bərabərliyi ödəndikdə σ müstəvisinə aid olur. $\overrightarrow{M_0M}$ vektorumm $\overrightarrow{M_0M}$ (x-x_0, y-y_0, z-z_0) koordinatları olduğundan (5) şərti

$$\begin{cases} x-x_0 = ua_1+vb_1, \\ y-y_0 = ua_2+vb_2, \\ z-z_0 = ua_3+vb_3 \end{cases}$$

bərabərliklər sistemi şəklində yazıla bilər. Bu bərabərliklərə σ müstəvisinin parametrik tənlikləri deyilir.

VI Mühazirə

. . **Müstəvinin ümumi tənliyi, onun araşdırılması. İki müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti**

5. Tutaq ki, afın koordinat sistemindəki (2) tənliyi ilə müstəvi verilmişdir. Əgər bu tənliyin sol tərəfindəki determinantı birinci sütun elementləri üzrə ayırsaq, müstəvinin

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{6}$$

şəklində tənliyini alarıq, burada

$$A=\begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} a_1\ b_1 \\ a_2\ b_2 \end{vmatrix},D\ =(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

α və b *vektorları komplanar olmadıqlarmdan (6) tənliyində A, B, C əmsalları eyni vaxtda sıfıra bərabər olmurlar. Ona görə də (6)-bir dərəcəli tənlikdir, Bu nəticəni belə ifadə etmək olar: İstənilən müstəvi bir tərtibli səthdir. Tərs hökmün doğruluğu asanlıqla isbat oluna bilər:*

<u>Teorem.</u> Fəzada afin koordinat sistеminə nəzərən (6) bir dərəcəli tənliyi ilə verilmiş səth müstəvidir. $\vec{a}(0,-C,B),\vec{b}(-C,0,A),\vec{c}(-B,A,0)$vektorları bu müstəvinin yönəldici alt fəzasma aiddirlər və onlardan hər hansı ikisi bu alt fəzanın bazisini əmələ gətirirlər.

(6) tənliyinə müstəvinin ümumi tənliyi deyilir. Ümumi tənliyin xüsusi hallarını qeyd edək.

1) *D=0. Bu halda σ müstəvisi koordinat başlanğıcından keçir.*
2) $A=0,B\neq 0,C\neq 0.$ *Bu halda σ müstəvisi Ox oxuna paralel olur, D=0 olduqda isə bu oxdan keçir.*
3) $A\neq 0,B=0,C\neq 0..$ *σ müstəvisi Oy oxuna paralel olur və D=o olduqda bu oxdan keçir.*
4) $A\neq 0,B\neq 0,C=0.$*σ müstəvisi Oz oxuna paralel olur və D=0 olduqda bu oxdan keçir.*
5) $A=0,B=0,C\neq 0.$*σ müstəvisi Oxy müstəvisinə paralel olur, D=0 olduqda isə bu müstəvi ilə*

üst-üstə düşür.

6) $A=0, B\neq 0, C=0$. σ müstəvisi Oxz müstəvisinə paralel olur, D=0 olduqda isə bu müstəvi ilə üst-üstə düşür.

7) $A\neq 0, B=0, C=0$. σ müstəvisi Oyz müstəvisinə paralel olur və D=0 olduqda bu müstəvi ilə üst-üstə düşür. Aşkardır ki, müstəvi düzbucaqh koordinat sistemində (6) tənliyi ilə verildikdə $\vec{n}(A,B,C)$ vektoru bu müstəviyə perpendikulyar olur.

Tutaq ki, müəyyən afm koordinat sistemində

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

(1)

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

(2)

ümumi tənlikləri ilə σ_1 və σ2 müstəviləri verilmişdir. Bu müstəvilərin qarşıhqlı vəziyyətini araşdıraq. σ_1 və σ2 müstəvüərinin qarşılıqh vəziyyəti ilə bağlı məsələ (1) və (2) xətti tənliklərinin tədqiqinə gətirilir.

$$\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \end{pmatrix} \text{ və } \begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 \end{pmatrix}$$

matrislərinin ranqlarını uyğun olaraq r və r_1 ilə işarə edək. Aydmdır ki, $r\leq r_1$. Kroneker-Kapelli teoreminə g
sislemi yalnız və yalnız $r=r_1$ olduqda uyuşandır, yəni σ_1 və σ2 müstəvilərinin yalnız və yalnız $r=r_1$ old
bir ortaq nöqtəsi vardır. Aşağıdakı hallar mümkündür.

1) $r_1=1, r=1$. Bu onu göstərir ki, (1) tənliyinin Aı, Bı,Cı və D_1 əmsalları (2) tənliyinin A2, B2, C2 və
əmsallarına mütənasibdirlər:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

Bu halda σ ı və σ2 müstəvilərindən hər hansı birinin istənilən nöqtəsi digərinə aid olur və ona görə də σ ι və
üstə düşür.

2) $r_1=2, r=2$. Bu halda σ ı və σ2 müstəviləri müxtəlif müstəvilərdir və ən azı bir ortaq nöqtəyə malikdirlər. Ona görə də onlar düz xətt boyunca kəsişirlər.

3) $r_1=2, r=1$. Bu halda (1) və (2) tənliklər sistemi uyuşan deyil, ona görə də σ ı və σ2 müstəvilərinin ortaq

nöqtələri yoxdur, yəni paraleldirlər. σ ı və σ2 müstəvilərinin paralellik şərtini

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

şəklində yaza bilərik.

VII Mühazirə

İki müstəvi arasında qalan bucaq. Müstəvinin normal tənliyi. Nöqtədən müstəviyə qədər olan məsafə

2. Tutaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində Ax+By+Cz+D=0 tənliyi ilə σ müstəvisi və bu müstəviyə aid olmayan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsi verilmişdir. M_0 nöqtəsindən σ müstəvisinə qədər olan p(Mo, σ) məsafəsi

$$\rho\left(M_0, \sigma\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (3)$$

düsturu ilə hesablanır. (4) düsturundan astifadə edərək, düzbucaqh koordinat sistemində $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$ tənlikləri ilə verilmiş və bir-birinə paralel olan σ_1 və σ_2 müstəviləri arasmdakı $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ məsafəsini tapaq, burada $D_1 \neq D_2$. Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - σ_1 müstəvisinin ixtiyari nöqtəsidir. Onda aşkardır ki, $\rho(\sigma_1, \sigma_2) = \rho(M_0, \sigma_2)$, ona görə də (4) düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$\rho(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. Tırtaq ki, düzbucaqlı koordinat sistemində (1) və (2) tənlikləri ilə kəsişən σ ı və σ2 müstəviləri verilmişdir. Bu müstəvilər arasındakı bucağı tapaq. İki kəsişən müstəvi dörd ikiüzlü bucaq əmələ gətirirlər və bu bucaqlardan ixtiyari biri verilmiş müstəvilər arasındakı bucaq adlanır . $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ və $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ vektorları uyğun olaraq, σ ι və σ2 müstəvilərinə perpendikulyaΓ olduqlanndan $\varphi=(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ bucağı σ ı və σ2 müstəvilərinin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucaqlardan birinin xətti bucağıdır. Ona görə də φ bucağmı təyin etmək yetərlidir:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4)$$

(4) düsturundan görünür ki, σ ı və σ2 müstəviləri yalnız və yalnız $\vec{n}\vec{n}_2=0$, yəni $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ olduqda perpendikulyardırlar.

Müstəvinin normal tənliyi

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

şəklindədir, burada $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ və $p\geq 0$.

VIII Mühazirə

Fəzada düz xəttin verilmə üsulları

1. *Fəzada verilmiş düz xəttə paralel olan istənilən sıfırdan fərqli vektor onun* yönəldici, *yaxud* istiqamətverici vektoru *adlanır. Düz xəttin vəziyyəti bu düz xəttin yönəldici vektorunun və müəyyən nöqtəsinin, yaxud iki nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur. Fəzada düz xətt üç üsulla verilə bilər:*

1) bir nöqtəsi və bir yünəldici vektoru ilə;

2) iki müxtəlif nöqtəsi ilə;

3) iki müstəvinin kəsişməsi kimi.

Tutaq ki, fəzada $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *afin koordinat sistemi seçilmişdir və bu sistemdə* d *düz xəttinin müəyyən* $M_0(x_0,y_0,z_3)$ *nöqtəsinin və yönəldici* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *vektorunun koordinatları məlumdur* d *düz xəttinin tənliyini yazaq. Aşkardır ki,* $M(x,y,z)$ *nöqtəsi yalnız və yalnız* $\overrightarrow{M_0M}$ *və* $\vec{a}$ *vektorları kollinear olduqda* d *düz xəttinə aid olar. Kollinearlıq şərtini*

$$\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{a} \qquad (1)$$

və ya

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar. (1) tənliyi düz xəttin fəzada vektorial tənliyi, (2) tənlikləri isə kanonik tənlikləri adlanır.

Fəzada iki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *afin koordinat sistemində* d *düz xəttinin* $M_1(x_1,y_1)$ *və* $M_2(x_2,y_2)$ *nöqtələrinin koordinatları məlumdur Onda* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *vektoru* d *düz xəttinin yönəldici vektorudur. Bu vektor* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *afin koordinat sistemində* $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ *koordinatlarına malikdir. Ona görə də (2) düsturuna əsasən* d *düz xəttinin tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3)$$

(3) tənliklərinə fəzada iki nöqtədən keçən və ya iki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənlikləri deyilir.

Mühazirə 9

Fəzada iki düz xəttin, düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyəti. Fəzada iki düz xətt arasında qalan bucaq

Tutaq ki, fəzada $d_1=(M_1,\vec{p}_1)$ və $d_2=(M_2,\vec{p}_2)$ düz xətləri verilmişdir. Bu düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətinin aşağıdakı 4 halı vardır:

1) $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p},\vec{p}_2\right)\neq 0$ şərti ödənildikdə $d_1=(M_1,\vec{p}_1)$ və $d_2=(M_2,\vec{p}_2)$ düz xətləri çarpaz olurlar;

2) $d_1=(M_1,\vec{p}_1)$ və $d_2=(M_2,\vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p},\vec{p}_2\right)=0$ şərti ödənildikdə və $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ vektorları kollinear olmadıqda bir nöqtədə kəsişirlər;

3) $d_1=(M_1,\vec{p}_1)$ və $d_2=(M_2,\vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p},\vec{p}_2\right)=0$ şərti ödənildikdə, $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ vektorları kollinear olduqda, lakin $\overrightarrow{M_1M_2},\vec{p}_1$ vektorları kollinear olmadıqda bir-birinə paralel olurlar;

4) $d_1=(M_1,\vec{p}_1)$ və $d_2=(M_2,\vec{p}_2)$ düz xətləri yalnız və yalnız $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ və $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorları cüt-cüt kollinear olduqda üst-üstə düşürlər.

Tutaq ki, fəzada $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nöqtəsindən keçən, yönəldici vektoru $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$ vektoru olan d düz xətti və ümumi tənliyi $Ax+By+Cz+D=0$ şəklində olan σ müstəvisi verilmişdir. d düz xəttinin və σ müstəvisinin qarşılıqlı vəziyyətinin aşağıdakı 3 halı vardır:

1) d düz xətti yalnız və yalnız

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$$

şərti ödənildikdə σ müstəvisini bir nöqtədə kəsir. Kəsişmə nöqtəsinin tapılması üçün d düz xəttinin və σ müstəvisinin tənlikləri birlikdə həll olunur.

2) d düz xətti yalnız və yalnız $\vec{a} // \sigma, M_0 \notin \sigma$ və ya

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

şərtləri ödənildikdə σ müstəvisinə paralel olur;

3) d düz xətti yalnız və yalnız $\vec{a} // \sigma, M_0 \in \sigma$ və ya

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

şərtləri ödənildikdə σ müstəvisinin üzərində yerləşir.

Tutaq ki, fəzada yönəldici vektorları $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ və $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ olan d_1 və d_2 düz xətləri verilmişdir. Bu düz xətlər arasındakı φ bucaqı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \qquad (1)$$

(1) düsturundan görünür ki, d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalnız $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, yaxud $p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 = 0$ şərti ödənildikdə perpendikulyar olurlar.

Mühazirə X
Fəzada düz xətt və müstəvi arasında qalan bucaq. Fəzada müstəvilər dəstəsi

Tutaq ki, fəzada yönəldici vektoru $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektoru olan d düz xətti və $Ax + By + Cz + D = 0$ ümumi tənliyinə malik olan σ müstəvisi verilmişdir. Nəzərdə tuturuq ki, d düz xətti σ müstəvisinə perpendikulyar deyildir.

d düz xətti ilə σ müstəvisi arasında qalan φ bucağı dedikdə d düz xəttinin σ müstəvisi üzərindəki proyeksiyası ilə əmələ gətirdiyi bucaqlardan kiçiyi başa düşülür. $d \perp \sigma$ halında isə $\varphi = \frac{\pi}{2}$ qəbul olunur. σ müstəvisinin $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektoruna baxaq, koordinat sisteminin düzbucaqlı olduğu nəzərdə tutulur. $\vec{n}$ və $\vec{a}$ vektorları arasındakı bucağı θ ilə işarə edək. Asanlıqla yoxlanılır ki, θ iti bucaq olduğu halda $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, θ kor bucaq olduğu halda isə $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$. Buradan alınır ki, $\sin\varphi = |cos\theta|$. Beləliklə, d düz xətti ilə σ müstəvisi arasında qalan φ bucağı aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}||\vec{a}|} = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Tutaq ki, fəzada $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ümumi tənlikləri ilə π_1 və π_2 müstəviləri verilmişdir. π_1 və π_2 müstəvilərinin tənliklərinin sol tərəflərindən istifadə etməklə aşağıdakı tənliyi tərtib edək:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \ , \tag{1}$$

burada λ, μ eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ixtiyari həqiqi ədədlərdir. (1) tənliyi ilə müəyyən π müstəvisi təyin olunur. Aşaöıdakı mümkün hallara baxaq.

1) Tutaq ki, $\pi_1 \cap \pi_2 = d$, yəni π_1 və π_2 müstəviləri müəyyən d düz xətti boyunca kəsişirlər. Aşkardır ki, π müstəvisi də d düz xəttindən keçər. λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə sonsuz sayda müstəvilər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa fəzada müstəvilərin məxsusi dəstəsi deyilir. d düz xətti isə dəstənin oxu adlanır.

2) Tutaq ki, $\pi_1 // \pi_2$, yəni π_1 və π_2 müstəviləri paraleldirlər. Asanlıqla yoxlanılır ki, bu halda (1) tənliyi ilə təyin olunan π müstəvisi π_1 və π_2 müstəvilərinin hər birinə parallel olur. Ona görə də λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə π_1 və π_2 müstəvilərinin hər birinə parallel olan sonsuz sayda müstəvilər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa fəzada müstəvilərin qeyri-məxsusi dəstəsi deyilir.

(1) tənliyi müstəvilər dəstəsinin tənliyi adlanır. Müəyyənlik üçün, $\lambda \neq 0$ olduğunu qəbul edək. Onda (1) tənliyi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \quad + \lambda_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{2}$$

şəklində yazılar, burada $\lambda_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}$ işarə olunmuşdur.

(2) tənliyindən müəyyən edirik ki, müstəvilər dəstəsi birparametrli çoxluqdur.

XI Mühazirə

İkitərtibli səth anlayışı. Fırlanma səthləri

Fəzada ixtiyari afin koordinat sistemindəki koordinatları iki tərtibli

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + \\ &+ 2a_{20} + 2a_{30} + a_{00} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

tənliyini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğuna iki tərtibli səth deyilir, burada $a_{11}, a_{22}, ..., a_{00}$ – həqiqi ədədlərdir, belə ki, iki tərtibli hədd əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir.

Kəsiklər metodu yalnız iki tərtibli səthlərə deyil, ixtiyari səthlərə tətbiq oluna bilər. Bu metodun mahiyyətini izah edək. Tutaq ki, S səthi düzbucaqlı koordinat sistemində

(1) tənliyi ilə verilmişdir. S səthini koordinat müstəvilərinə paralel olan müstəvilərlə (və ya koordinat müstəviləri ilə) kəsirik və səthin bu müstəvilərlə kəsişmə xətlərini təyin edirik. Bu xətlərin tiplərinə əsasən səthin forması haqqında fikir yürüdürük. Kəsiklər metodunun tətbiqi aşağıdakı teoremə əsaslanır:

Teorem 1. Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində (1) tənliyi ilə S səthi və $z = h$ tənliyi ilə Oxy müstəvisinə paralel olan, və ya onunla üst-üstə düşən σ müstəvisi verilmişdir. Əgər S səthi σ müstəvisi ilə γ xətti boyunca kəsişirsə, onda γ xəttinin Oxy müstəvisi üzərindəki proyeksiyasının $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində

$$F(x, y, h) = 0$$

tənliyi vardır.

Hər bir nöqtəsi ilə bərabər bu nöqtənin müəyyən qeyd olunmuş d düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan çevrəni də özündə saxlayan səthə fırlanma səthi deyilir. Ətrafında fırlanmanın aparıldığı d düz xətti fırlanma oxu adlanır. Fırlanma səthinin fırlanma oxuna perpendikulyar olan müstəvilərlə kəsişməsindən alınan çevrələrə paralellər deyilir. Fırlanma oxundan keçən müstəvilər isə fırlanma səthini meridianlar adlandırılan xətlər boyunca kəsirlər.

Fırlanma səthi aşağıdakı kimi təyin oluna bilər. Tutaq ki, σ müstəvisində d vüz xətti və γ xətti verilmişdir. γ xəttinin d düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan səth oxu d düz xətti olan fırlanma səthidir. γ xəttinin hər bir nöqtəsi d düz xətti ətrafında fırlanaraq, bu səthin paralelini əmələ gətirir.

Aşağıdakı teorem γ xəttinin σ müstəvisindəki tənliyinə əsasən, fırlanma səthinin tənliyini müəyyən etməyə imkan verir.

Teorem 2. Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemində

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

tənliyi

$$x = f(z), y = 0$$

tənlikləri ilə verilmiş xəttin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınan fırlanma səthinin tənliyidir.

XII Mühazirə

Silindrik və konik səthlər

Hər bir M nöqtəsi ilə bərabər, M nöqtəsindən keçən və verilmiş sıfırdan fərqli $\vec{p}$ vektoruna paralel olan düz xətti də özündə saxlayan səthə silindrik səth, və ya silindr deyilir. $\vec{p}$ vektoruna paralel olan və silindrik səth üzərində yerləşən düz xətlər bu səthin doğuranları adlanır.

Silindrik səth bu şəkildə qurula bilər. Tutaq ki, $\gamma-$müəyyən xətdir, $\vec{p}$ isə sıfırdan fərqli vektordur. Hər biri γ xəttinin müəyyən nöqtəsindən keçən və $\vec{p}$ vektoruna paralel olan bütün düz xətlərin əmələ gətirdiyi səth silindrik səthdir. Bu halda γ xətti bu silindrik səthin yönəldicisi adlanır.

Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. Tutaq ki, fəzada düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi və müstəvi üzərində $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

tənliyi ilə γ xətti verilmişdir.

Onda (1) tənliyi fəzada yönəldicisi γ xətti olan və doğuranları $\vec{k}$ vektoruna paralel olan silindrik S səthini təyin edir.

Əgər (1) tənliyi x və y dəyişənlərinə nəzərən iki dərəcəli tənlikdirsə, onda yönəldicisi γ xətti olan və doğuranları $\vec{k}$ vektoruna paralel olan silindrik səthə iki tərtibli silindrik səth (və ya qısa şəkildə iki tərtibli silindr) deyilir. (1) yönəldicisinin ellips, hiperbola, və ya parabola olmasından asılı olaraq, bu silindri elliptik, hiperbolik, və ya parabolik silindr adlandırırlar.

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ koordinat sistemi elə seçilmişdir ki, iki tərtibli silindrik səthin doğuranları $\vec{k}$ vektoruna paraleldirlər, γ yönəldicisinin isə $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat *sistemində kanonik tənlikləri vardır. Bu halda mümkün silindrik səthlərin aşağıdakı tənlikləri olacaqdır:*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – *elliptik silindr;*

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ – *hiperbolik silindr;*

$y^2=2px$ - *parabolik silindr;*

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – Oz *oxu boyunca kəsişən iki müstəviyə parçalanan silindr;*

$x^2-a^2=0,$
$a\neq 0$ - *paralel müstəvilər cütünə parçalanan silindr;*

$x^2=0$ - *üst-üstə düşən müstəvilər cütünü ifadə edən silindr.*

Bu tənliklərə uyğun iki tərtibli silindrik səthin kanonik tənlikləri deyilir.

Təpəsi M_0 *nöqtəsində olan konik səth, və ya konus elə səthə deyilir ki, o* M_0 *nöqtəsindən fərqli hər bir* M *nöqtəsi ilə bərabər,* M_0M *düz xəttini də özündə saxlayır.*

Konusun təpəsindən keçən və onun üzərində yerləşən düz xətlərə bu konusun doğuranları deyilir. Konusun tərifindən heç də o alınmır ki, konus yeganə təpəyə malikdir. Məsələn müstəvi də konik səthdir və onun hər bir nöqtəsi təpə qəbul oluna bilər.

Konik səth aşağıdakı kimi qurula bilər. Fəzada γ *xəttini və onun üzərində olmayan* M_0 *nöqtəsini nəzərdən keçirək. Hər biri* M_0 *nöqtəsindən və* γ *xəttinin müəyyən nöqtəsindən keçən bütün düz xətlərin təyin etdiyi səth təpəsi* M_0 *nöqtəsində yerləşən konik səthdir. Bu halda* γ *xəttinə yönəldici deyilir.*

Təpəsi $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *düzbucaqlı koordinat sisteminin başlanğıcında yerləşən və yönəldicisi*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=c, (c\neq 0)$$

tənlikləri ilə verilən γ ellipsi olan Φ konik səthinin tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (1)$$

şəklindədir.

(1) tənliyinə iki tərtibli konusun kanonik tənliyi deyilir.

γ yönəldicisi çevrə olduqda, yəni $a=b$ halında (1) tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (2)$$

şəklində olur. Düzbucaqlı koordinat sistemində (2) tənliyi ilə verilən səthə dairəvi konik səth, və ya dairəvi konus deyilir. Aşkardır ki, bu səth Oxz müstəvisində yerləşən və $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $x=\frac{a}{c}z$ tənliyi ilə verilən düz xəttin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

Dairəvi konik səthin müxtəlif müstəvilərlə kəsiklərini təyin edək.

1) Oxy müstəvisinə paralel olan istənilən müstəvi (2) dairəvi konusunu çevrə boyunca kəsir;

2) Dairəvi konusun təpəsindən keçən σ_0 müstəvisi ya onunla təpədən fərqli heç bir ortaq nöqtəyə malik deyil, ya dairəvi konusa toxunur, ya da konusu iki doğuran boyunca kəsir;

3) Əgər σ kəsik müstəvisi təpədən keçmirsə və Oxy müstəvisi ilə α $(0<\alpha\le\frac{\pi}{2})$ bucağını əmələ gətirirsə, onda bu halda σ müstəvisinin dairəvi konusla γ kəsiyi ya ellips, ya hiperbola, ya da paraboladır.

Konus kəsiyi elə xəttə deyilir ki, bu xətt boyunca dairəvi konus onun təpəsindən keçməyən ixtiyari müstəvi ilə kəsişir. Beləliklə, konus kəsikləri ellips, hiperbola və paraboladır

XIII Mühazirə

Ellipsoidlər

Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilən səthə ellipsoid deyilir. (1) tənliyi ellipsoidin kanonik tənliyi adlanır. Müsbət a,b,c *ədədlərinə ellipsoidin yarımoxları deyilir. Əgər* $a\neq b, b\neq c, c\neq a$ *olarsa, onda deyirlər ki, ellipsoid üçoxludur. (1) kanonik tənliyindən görünür ki, ellipsoid koordinat müstəvilərinə, koordinat başlanğıcına və koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Ellipsoidin simmetriya mərkəzinə onun mərkəzi, simmetriya oxlarına isə onun oxları deyilir. Oxlardan hər biri ellipsoidi iki nöqtədə kəsir. Bu nöqtələr ellipsoidin təpələri adlanır. Üçoxlu ellipsoidin altı təpəsi vardır:* $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0),$ $B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0), C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$. *Asanlıqla müəyyən olunur ki,*

$$-a\leq x\leq a, \quad -b\leq y\leq b, \quad -c\leq z\leq c.$$

Ellipsoidin $z=h$ *müstəvisi ilə kəsiyinin* Oxy *müstəvisində* $O\vec{i}\vec{j}$ *koordinat sistemində*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \qquad (2)$$

tənliyi vardır.

Üç mümkün halı qeyd edə bilərik.

1) $|h|<c$. *Bu halda kəsikdə yarımoxları* $a^{\bullet}=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b^{\bullet}=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ *ədədləri olan ellips alınır. Xüsusi halda* Oxy *müstəvisi ellipsoidi* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipsi üzrə kəsir.*

2) $|h|=c$. *(2) tənliyi* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ *şəklində yazılır.* $z=h$ *müstəvisi ellipsoidlə yalnız bir ortaq nöqtəyə-ellipsoidin təpələrindən birinə malik olur.*

3) $|h|>c$. *(2) tənliyi xəyali ellipsin tənliyi olur.* $z=h$ *müstəvisinin ellipsoidlə ortaq nöqtələri olmur.*

Əgər ellipsoidin iki yarım oxu bərabərdirsə, məsələn, $a=b$ olarsa, onda ona fırlanma ellipsoidi deyilir və tənliyi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

şəklində yazılır. Qeyd edək ki, (3) səthi Oxz müstəvisində yerləşən

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipsinin Oz oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.

Hər üç oxu bir-birinə bərabər olduqda, yəni $a=b=c$ şərtləri ödənildikdə ellipsoid sfera olur: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Deməli, sfera ellipsoidin xüsusi halıdır.

XIV Mühazirə

Hiperboloidlər

Biroyuqlu və ikioyuqlu hiperboloidləri fərqləndirirlər.

1) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə biroyuqlu hiperboloid deyilir. (1) tənliyi biroyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır. Kanonik tənlikdən görünür ki, biroyuqlu hiperboloid koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına (səthin oxları) və koordinat başlanğıcına (səthin mərkəzi) nəzərən simmetrikdir. Ox və Oy oxları biroyuqlu hiperboloidi $A_1(a,0,0), A_2(-a,0,0)$ və $B_1(0,b,0), B_2(0,-b,0)$ nöqtələrində kəsirlər. Bu oxlar biroyuqlu hiperboloidin həqiqi oxları, göstərilən nöqtələr isə onun təpələri adlanır. Oz oxunun isə biroyuqlu hiperboloidlə ortaq nöqtələri yoxdur. Ona görə də Oz oxuna biroyuqlu hiperboloidin xəyali oxu deyilir.

(1) səthinin $z=h$ müstəvisi ilə kəsişməsindən yarımoxları $a^{\bullet}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$, $b^{\bullet}=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ ədədləri olan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

ellipsi alınır. $h=0$ *olduqda* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipsi alınır. Bu ellipsə biroyuqlu hiperboloidin boğaz ellipsi deyilir. Eyni qayda ilə biroyuqlu hiperboloidin* $x=h$ *və* $y=h$ *müstəviləri ilə kəsiklərini təyin etmək olur.*

Əgər (1) tənliyində $a=b$ *olarsa, onda fırlanma biroyuqlu hiperboloidi adlandırılan səthin*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

tənliyini alarıq. Bu səth $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *hiperbolasının* Oz *oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.*

2) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (2)$$

tənliyi ilə verilən səthə ikioyuqlu hiperboloid deyilir. (2) tənliyi ikioyuqlu hiperboloidin kanonik tənliyi adlanır. (2) tənliyindən görünür ki, ikioyuqlu hiperboloid koordinat müstəvilərinə, koordinat oxlarına (simmetriya oxları) və koordinat başlanğıcına (simmetriya mərkəzi) nəzərən simmetrikdir. Oz *oxu (2) səthini onun təpələri adlandırılan* $C_1(0,0,c), C_2(0,0,-c)$ *nöqtələrində kəsir.* Oz *oxuna ikioyuqlu hiperboloidin həqiqi oxu deyilir.* Ox *və* Oy *simmetriya oxlarının ikioyuqlu hiperboloidlə ortaq nöqtələri olmadığından, bu oxlar xəyali oxlar adlanır.*

(2) səthinin $z=h$ *müstəvisi ilə kəsiyinin*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

tənliyi vardır. $|h|>c$ *olduqda bu tənliklə ellips təyin olunur. Göstərmək olur ki, (2) səthinin* $x=h$ *və* $y=h$ *müstəviləri ilə kəsikləri hiperbolalardır.*

Əgər (2) tənliyində $a=b$ *olarsa, onda fırlanma ikioyuqlu hiperboloidi adlandırılan səthin*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

tənliyini alarıq. Qeyd edək ki, bu səth $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *hiperbolasının* Oz *oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.*

XV Mühazirə

Paraboloidlər

Elliptik və hiperbolik paraboloidləri fərqləndirirlər.

1) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad (1)$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə elliptik paraboloid deyilir. (1) tənliyi elliptik paraboloidin kanonik tənliyi adlanır. (1) tənliyindən görünür ki, elliptik paraboloid Oxz *və* Oyz *koordinat müustəvilərinə və* Oz *koordinat oxuna (simmetriya oxu) nəzərən simmetrikdir. Bu səth* Oxy *koordinat müstəvisinə,* Ox, Oy *koordinat oxlarına və keoordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Elliptik paraboloidin öz oxu ilə kəsişmə nöqtəsiniə onun təpəsi deyilir. Səth (1) kanonik tənliyi ilə verildiyi halda koordinat başlanğıcı səthin təpəsində seçilmiş olur.*

(1) kanonik tənliyi ilə verilmiş elliptik paraboloidin $z=h$ *müstəvisi ilə kəsiyinin*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \qquad (2)$$

tənliyi vardır.

(2) tənliyi $h>0$ *olduqda ellips,* $h=0$ *olduqda koordinat başlanğıcında kəsişən xəyali düz xətlər cütünü,* $h<0$ *olduqda isə xəyali ellips təyin edir.*

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, (1) səthinin $y=h$ *və* $x=h$ *müstəviləri ilə kəsikləri parabolalardır.*

Əgər (1) tənliyində $a=b$ *qəbul etsək, fırlanma paraboloidi adlanan səthin*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z$$

tənliyini alarıq. Bu səth $x^2 = 2a^2 z$ *parabolasının* Oz *oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.*

2) Müəyyən düzbucaqlı koordinat sistemində

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (3)$$

tənliyi ilə təyin olunan səthə hiperbolik paraboloid deyilir. (3) tənliyi hiperbolik paraboloidin kanonik tənliyi adlanır. Elliptik paraboloiddə olduğu kimi, hiperbolik paraboloid Oxz *və* Oyz *koordinat müustəvilərinə və* Oz *koordinat oxuna (simmetriya oxu) nəzərən simmetrikdir. Bu səth* Oxy *koordinat müstəvisinə,* Ox, Oy *koordinat oxlarına və keoordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Hiperbolik paraboloidin öz oxu ilə kəsişmə nöqtəsiniə onun təpəsi deyilir. Səth (3) kanonik tənliyi ilə verildiyi halda koordinat başlanğıcı səthin təpəsində seçilmiş olur.*

(3) kanonik tənliyi ilə verilmiş hiperbolik paraboloidin $z = h$ *müstəvisi ilə kəsiyinin*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \qquad (4)$$

tənliyi vardır.

$h > 0$ *olduqda (4) tənliyi hiperbola,* $h = 0$ *olduqda səthin təpəsində kəsişən həqiqi düz xətlər cütünü,* $h < 0$ *olduqda isə hiperbola təyin edir.*

Asanlıqla yoxlamaq olur ki, (3) səthinin $y = h$ *və* $x = h$ *müstəviləri ilə kəsikləri parabolalardır.*